

Période opérationnelle moyenne de la carte de moyennes mobiles équipondérées pour le contrôle du centrage d'un procédé

Ndèye Niang, Gilbert Saporta

▶ **To cite this version:**

Ndèye Niang, Gilbert Saporta. Période opérationnelle moyenne de la carte de moyennes mobiles équipondérées pour le contrôle du centrage d'un procédé. Revue de Statistique Appliquée, 1995, 43 (3), pp.5-20. hal-02507882

HAL Id: hal-02507882
https://cnam.hal.science/hal-02507882

Submitted on 16 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

N. NIANG
G. SAPORTA

Période opérationnelle moyenne de la carte de moyennes mobiles équipondérées pour le contrôle du centrage d'un procédé

Revue de statistique appliquée, tome 43, n° 3 (1995), p. 5-20
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1995__43_3_5_0>

© Société française de statistique, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Rev. Statistique Appliquée, 1995, **XLIII** (3), 5-20

PÉRIODE OPÉRATIONNELLE MOYENNE DE LA CARTE DE MOYENNES MOBILES ÉQUIPONDÉRÉES POUR LE CONTRÔLE DU CENTRAGE D'UN PROCÉDÉ

N. Niang, G. Saporta

Département de Mathématiques
Conservatoire National des Arts et Métiers Paris

RÉSUMÉ

La période opérationnelle moyenne d'une carte de contrôle est le nombre moyen d'échantillons ou sous groupes prélevés entre le moment où un déréglage se produit et l'instant où la carte de contrôle le signale. C'est une mesure communément admise de l'efficacité d'une carte de contrôle. Nous donnons dans cet article les formules exactes de calcul de la période opérationnelle moyenne de la carte de moyennes mobiles équipondérées. Les tableaux et les graphiques fournis en annexe permettent de déterminer la carte adaptée à la détection de déréglages d'amplitude fixée. On constate que la carte de moyennes mobiles équipondérées remplace avantageusement la carte de Shewhart et est d'efficacité comparable aux cartes EWMA et CUSUM en étant d'utilisation aussi simple.

Mots-clés : *carte de contrôle, moyennes mobiles, période opérationnelle moyenne.*

SUMMARY

When controlling a process mean, we are interested with charts that can detect a shift in the mean as soon as possible. The average run length of a control chart is the expected number of samples or subgroups that would be obtained before a out-of-control signal is received. In this article we present exact formulas for the calculation of the average run length of the moving average chart. Tables and charts, provided in annexes, allow the choice of the adequate control chart for a shift of fixed magnitude. It is clear that the moving average control chart is better than the Shewhart control chart and has an efficiency similar to EWMA and CUSUM charts while being as of simple use.

Keywords : *Control chart, moving average, average run length.*

1. Introduction

Le contrôle statistique en cours de fabrication est essentiellement basé sur l'utilisation de cartes de contrôle dites aux mesures traçant l'évolution des caractéristiques d'un produit ou d'un procédé. La carte de contrôle est un outil qui permet de détecter à travers des prélèvements successifs de petits échantillons de taille n le déréglage d'un paramètre de centrage (moyenne) ou de dispersion (écart

type, étendue) par rapport à des valeurs de référence fixées. Nous nous intéressons exclusivement au déréglage de la moyenne d'un procédé.

Il existe plusieurs sortes de cartes de contrôle toutes basées sur l'hypothèse que les X_i sont distribués selon une loi normale $N(m_0;\ \sigma_0)$; les valeurs cibles ou de référence m_0 et σ_0 sont supposées connues ou fixées, dans le cas contraire, elles sont remplacées par des estimations sans biais. On peut distinguer deux grandes familles de cartes de contrôle :

– les cartes de contrôle qui utilisent à chaque instant i la seule valeur $\overline{X}_i$ moyenne des n mesures dont on dispose à l'instant i; ce sont les cartes de Shewhart classiques [3]. On compare chaque valeur $\overline{X}_i$ aux limites $m_0 - 3\sigma_0/\sqrt{n}$ et $m_0 + 3\sigma_0/\sqrt{n}$.

– les cartes de contrôle qui utilisent à la fois les mesures à l'instant i et les mesures aux instants antérieurs à i. Les plus répandues sont les cartes à sommes cumulées (CUSUM) [7] et les cartes de moyennes mobiles à pondération exponentielle (EWMA) [4] qui à chaque instant i comparent une statistique fonction de toutes les mesures aux limites de contrôle.

Pour les CUSUM on calcule $S_i^+ = \max(0, S_{i-1}^+ + z_i - k)$ et $S_i^- = \min(0,\ S_{i-1}^- + z_i + k)$ où z_i est la valeur centrée réduite de $\overline{X}_i$ et k un coefficient de sensibilité en général choisi égal à la moitié du déréglage que l'on souhaite détecter. L'alerte est donnée lorsque S_i^+ est supérieure à h ou S_i^- inférieure à $-h$; pour le choix de la valeur limite h, on se reportera à la norme AFNOR X06-031.4.

Les EWMA sont basées sur une moyenne pondérée des $\overline{X}_i$; à chaque instant i on calcule $M_i = r\overline{X}_i + (1-r)M_{i-1}$.

On peut également utiliser les cartes de moyennes mobiles équipondérées d'ordre w [3]; nous rappellerons leur mise au point dans le paragraphe suivant. Elles utilisent non pas toutes les mesures mais les w les plus récentes. De façon quelque peu surprenante elles sont moins utilisées que les CUSUM ou EWMA. Cela est peut-être dû au manque de travaux ou publications concernant leur efficacité. En effet, alors que des tables donnant la période opérationnelle moyenne des cartes CUSUM [1] et EWMA [2] [6] ont été publiées, les seuls éléments à notre connaissance sur la période opérationnelle moyenne des cartes de moyennes mobiles équipondérées sont des résultats de simulation effectuées par Roberts [4] [5]. Notons que les périodes opérationnelles moyennes qu'il obtient sont assez éloignées des valeurs exactes que nous avons calculées.

Mais plus que les statistiques suivies, c'est la rapidité avec laquelle on détecte les déréglages qui différencie les cartes de contrôle. Cette rapidité s'exprime en terme de période opérationnelle moyenne qui est l'espérance mathématique du nombre de prélèvements nécessaires pour que le déréglage soit détecté. La carte de Shewhart détecte les grands déréglages plus vite que les autres cartes citées. Ces dernières sont plus efficaces pour les petits déréglages car elles accumulent les observations passées alors que la carte de Shewhart n'est qu'une succession de tests de moyennes indépendants. De ce fait, les courbes d'efficacité qui donnent la probabilité de rester à l'intérieur des limites de contrôle en fonction du déréglage Δ, n'ont de sens que pour la carte de Shewhart. En effet soit p cette probabilité, on a :

$$p = P(m_0 - 3\sigma_0/\sqrt{n} < \overline{X} < m_0 + 3\sigma_0/\sqrt{n})$$

avec $\overline{X}$ distribué selon une loi normale $N(m_0 + \Delta;\ \sigma_0/\sqrt{n})$,

$$p = P(-3 - \Delta/(\sigma_0/\sqrt{n}) < U < 3 - \Delta/(\sigma_0/\sqrt{n}))$$
$$p = P(-3 - \delta < U < 3 - \delta) \quad \text{avec } \delta = \Delta/(\sigma_0/\sqrt{n})$$

où U représente une variable normale centrée réduite.

On constate donc que la probabilité est constante, indépendante de l'instant i du contrôle alors que pour les cartes CUSUM, EWMA ou moyennes mobiles équipondérées elle varie selon la date du prélèvement. Ainsi seule la considération de la période opérationnelle moyenne permet la comparaison de ces différents types de cartes.

Toutes les cartes définies ci-dessus peuvent être utilisées lorsque $n = 1$, ce qui se produit pour le contrôle de procédés continus, par exemple en chimie. Mais l'efficacité de la carte de Shewhart étant très mauvaise on recommande généralement les cartes CUSUM et EWMA. La carte de moyennes mobiles équipondérées est également une bonne solution comme nous le verrons.

Après un bref rappel sur la carte de moyennes mobiles équipondérées, nous démontrons dans le paragraphe 3 la formule de calcul de sa période opérationnelle moyenne. Les résultats des calculs sous forme de tables et de courbes seront ensuite exploités pour étudier l'efficacité de la carte de moyennes mobiles equipondérées comparativement aux CUSUM, EWMA et Shewhart.

2. La carte de moyennes mobiles équipondérées

Comme nous l'avons dit en introduction la carte de moyennes mobiles équipondérées d'ordre w repose sur l'utilisation conjointe des w mesures les plus récentes; à l'instant i on supprime la plus ancienne des moyennes des échantillons et on ajoute la plus récente moyenne à l'ensemble. Ainsi on calcule :

$$M_i = (\overline{X}_i + \overline{X}_{i-1} + \ldots + \overline{X}_{i-w+1})/w \quad \text{si } i \geqslant w$$
$$M_i = (\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \ldots + \overline{X}_i)/i \quad \text{si } i < w$$

Sous l'hypothèse de normalité des X_i, M_i, est pour $i \geqslant w$, distribué selon une loi normale $N(m_0;\ \sigma/\sqrt{nw})$.. Les limites de contrôle de la carte de moyennes mobiles équipondérées sont donc $m_0 - L\sigma_0/\sqrt{nw}$ et $m_0 + L\sigma_0/\sqrt{nw}$. On aura des limites de contrôle variables pour $i < w$, mais elles deviennent stables dès que $i \geqslant w$. Pour avoir des limites à 3 sigma, on prend $L = 3$.

Pour $w = 1$ on retrouve la carte de Shewhart. En fait la carte de moyennes mobiles équipondérées d'ordre w est comparable à une carte de Shewhart où n est multiplié par w. On conçoit que la carte de moyennes mobiles équipondérées soit plus efficace que la carte de Shewhart puisque tout se passe comme si on avait multiplié par w la taille des prélèvements. Intuitivement, plus le déréglage est petit, plus l'ordre w de la moyenne mobile doit être élevé pour une bonne détection; l'amplitude du déréglage à détecter et l'ordre de la moyenne mobile varient en sens inverse.

Exemple illustratif : (cet exemple est tiré de la norme ISO 8258).

On cherche à maîtriser un processus d'emballage : le poids moyen souhaité des paquets est m_0 égal à 100.6 g et l'écart-type du procédé est supposé de 1.4 g. La figure 1 représente les différentes cartes de contrôle pour un jeu de données constitué des moyennes de 25 échantillons de taille 5.

On constate que la carte de Shewhart simple (fig1-a) ne signale aucun déréglage. Par contre les autres cartes (fig1-b, fig1-c,fig1-d, fig1-e) détectent un déréglage au $14^{\text{ème}}$ échantillon. On remarque de même que la carte des moyennes mobiles d'ordre 3 est plus efficace que celle d'ordre 9 qui ne détecte le déréglage qu'au 16^{me} échantillon.

Remarque : Il arrive qu'un déréglage paraisse manifeste sur la carte de Shewhart sans qu'aucun point ne sorte des limites. Des règles d'alerte supplémentaires basées sur la disposition des points sur la carte sont communément utilisées pour améliorer l'efficacité de la carte de Shewhart. Ainsi la norme AFNOR X-06-030 préconise d'utiliser les règles suivantes :

R1 : 2 points parmi 3 points successifs sont situés entre les limites de contrôle et les limites de surveillance (placées à deux écart-types).

R2 : 9 points successifs sont situés d'un même côté de la limite centrale.

R3 : 9 points successifs forment une séquence croissante ou décroissante.

Ici la règle R2 détecterait une variation de la moyenne au $18^{\text{ème}}$ échantillon. Cependant l'ajout de règles supplémentaires complique l'utilisation de la carte de Shewhart et augmente le nombre de fausses alertes.

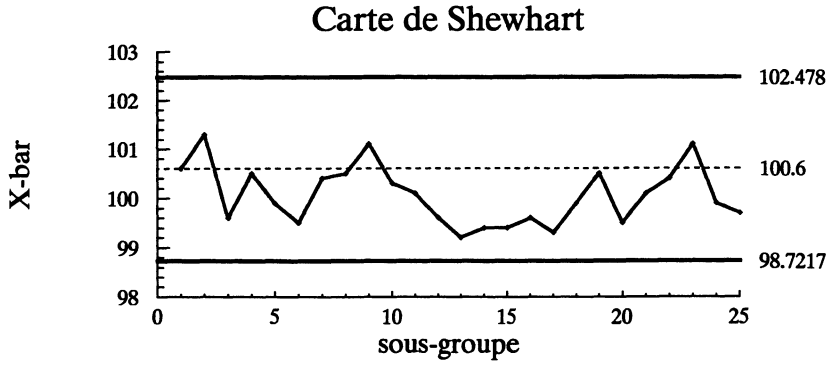


FIGURE 1-a

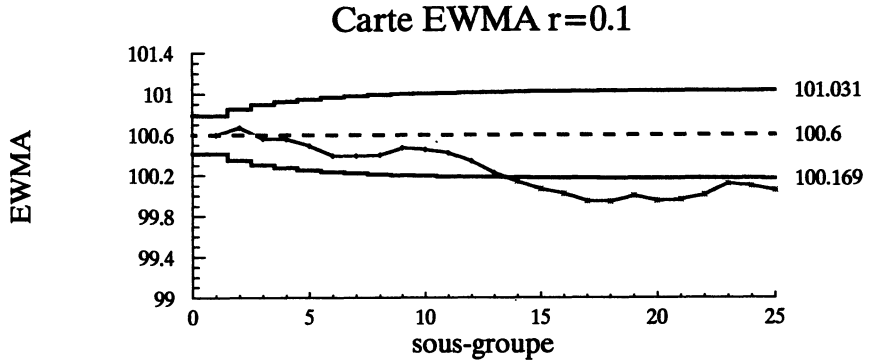


FIGURE 1-b

CARTE CUSUM

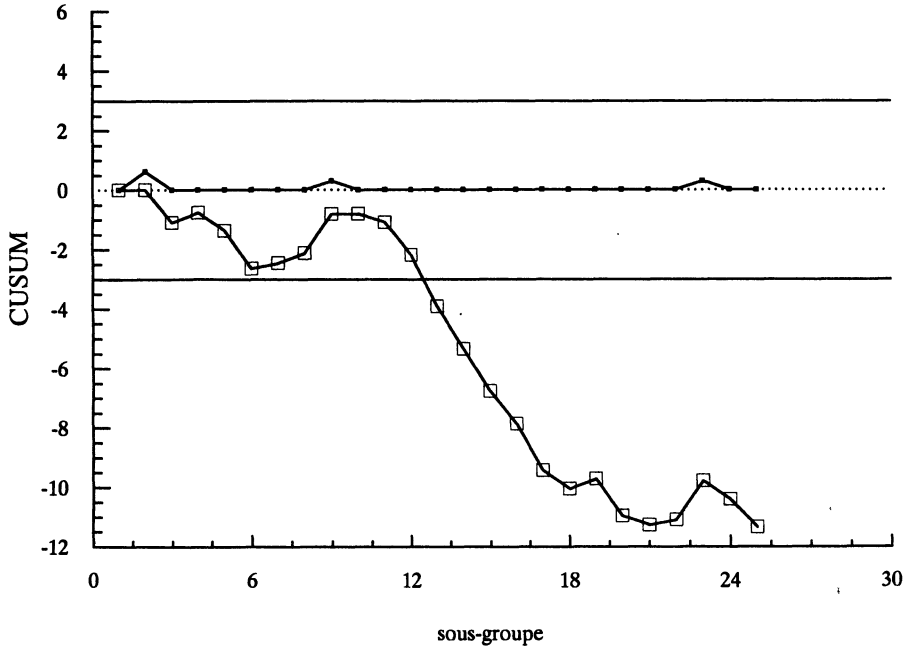


FIGURE 1-c

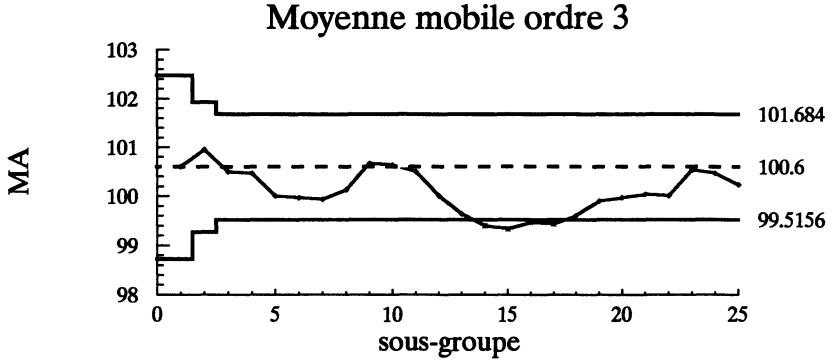


FIGURE 1-d

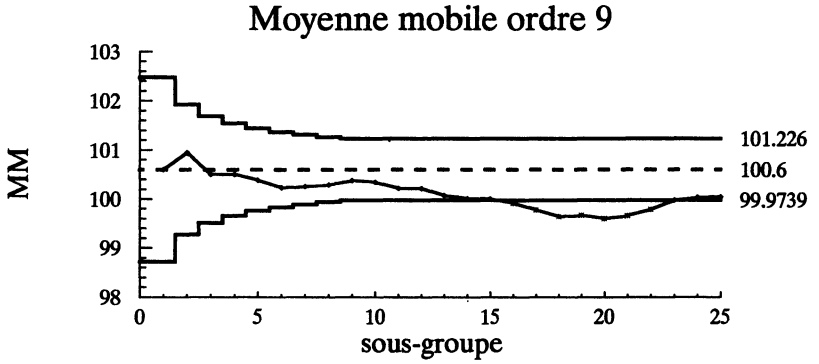


FIGURE 1-e

3. Calcul de la période opérationnelle moyenne

Soit N le nombre de prélèvements nécessaires pour sortir des limites de contrôle lorsqu'un déréglage d'amplitude Δ se produit. La période opérationnelle moyenne est l'espérance mathématique de N. Le calcul de la période opérationnelle moyenne est basée sur l'hypothèse qu'un déréglage de la moyenne se traduit par un passage de cette dernière de m_0 à $m_0 + \Delta$, niveau auquel elle reste jusqu'à ce qu'une action corrective soit prise auquel cas elle revient à m_0.

Ainsi si le déréglage s'est produit entre les instants $i-1$ et i, alors M_i défini par $M_i = (\overline{X}_i + \overline{X}_{i-1} + \ldots + \overline{X}_{i-w+1})/w$ est distribué selon une loi normale $N(m_0 + \Delta/w;\ \sigma_0/\sqrt{nw})$; de même M_{i+1} suit une loi normale $N(m_0 + 2\Delta/w;\ \sigma_0/\sqrt{nw})$; et ainsi de suite jusqu'à M_{i+w} qui suit une loi normale $N(m_0 + \Delta;\ \sigma_0/\sqrt{nw})$; et pour les M_{i+k} avec $k > w$ on aura cette dernière distribution.

La probabilité de sortir des limites de contrôle k instants après le déréglage est :

$$p_k = P(M_{i+k-1} > m_0 + L\sigma_0/\sqrt{nw}) + P(M_{i+k-1} < m_0 - L\sigma_0/\sqrt{nw})$$

Puisque M_{i+k-1} est distribué selon une loi normale $N(m_0+k\Delta/w;\ \sigma_0/\sqrt{nw})$ pour $k = 1$ à $w - 1$ on a :

$$p_k = P(U > L - (k\Delta/w)/(\sigma_0/\sqrt{nw})) + P(U < -L - (k\Delta/w)/(\sigma_0/\sqrt{nw}))$$

où U représente la loi normale standard.

En posant $\delta = \Delta/(\sigma_0/\sqrt{n})$, on a :

$$p_k = P(U > L - k\delta/\sqrt{w}) + P(U < -L - k\delta/\sqrt{w}) \quad \text{pour } k = 1 \text{ à } w - 1$$

et $\quad p_k = p_w = P(U > L - \delta\sqrt{w}) + P(U < -L - \delta\sqrt{w}) \quad \text{pour } k \geqslant w.$

N étant le nombre de prélèvements nécessaires pour sortir des limites on a, en posant $p_0 = 0$:

$$P(N = 1) = p_1$$
$$P(N = 2) = p_2(1 - p_1)$$
$$P(N = k) = p_k \prod_{j=0}^{k-1}(1 - p_j) \quad \text{pour } k \leqslant w \text{ et}$$
$$P(N = k) = p_w(1 - p_w)^{k-w} \prod_{j=0}^{w-1}(1 - p_j) \quad \text{pour } k > w.$$

Alors l'espérance mathématique de N est :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{w-1} kp_k \left(\prod_{j=0}^{k-1}(1 - p_j) \right) + \sum_{k=w}^{\infty} kp_w(1 - p_w)^{k-w} \prod_{j=0}^{w-1}(1 - p_j)$$

Mais

$$\sum_{k=w}^{\infty} kp_w(1 - p_w)^{k-w} \prod_{j=0}^{w-1}(1 - p_j) = C \sum_{k=w}^{\infty} kp_w(1 - p_w)^{k-w}$$

avec $\quad C = \prod_{j=0}^{w-1}(1 - p_j)$ et

$$\sum_{k=w}^{\infty} kp_w(1-p_w)^{k-w} = \sum_{j=1}^{\infty}(w+j-1)p_w(1-p_w)^{j-1} \quad \text{avec } k = w+j-1$$

$$= (w-1)\sum_{j=1}^{\infty} p_w(1-p_w)^{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} jp_w(1-p_w)^{j-1}.$$

D' après les formules classiques suivantes sur les progressions géométriques :

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{\infty} jp(1-p)^{j-1} = 1/p$$

on a donc :

$$\sum_{k=w}^{\infty} kp_w(1-p_w) = (w-1) + 1/p_w$$

Finalement,

$$E(N) = \sum_{k=1}^{w-1} kp_k \left(\prod_{j=0}^{k-1}(1-p_j)\right) + \left(\prod_{j=0}^{w-1}(1-p_j)\right)(w-1+1/p_w).$$

Cette expression représente la période opérationnelle moyenne d'une carte de moyennes mobiles d'ordre pour le contrôle de la moyenne d'un procédé. Dans la suite nous la noterons POM (δ, L, w).

4. Résultats et commentaires

La formule a été utilisée pour différentes valeurs des paramètres δ, L, w. Les résultats des calculs figurent dans les tableaux en annexe 1. Nous remarquons que la période opérationnelle moyenne POM $(0,\ L,\ w)$ ne dépend pas de w, elle est donc identique à celle de la carte de Shewhart. Elle correspond au nombre moyen de prélèvements avant une fausse alerte. Donc, si comme il est de coutume, on se fixe ce nombre, ceci revient simplement à fixer le paramètre L.

Nous nous intéressons principalement au cas $L = 3$ qui correspond à la valeur pour les limites de contrôle standard à 3 écart-types de la moyenne. Avec une période moyenne avant fausse alerte égale à la valeur classique 370, nous avons tracé des courbes de la période opérationnelle moyenne pour différentes valeurs de w (annexe 2). Quel que soit w, nous constatons la supériorité de la carte de moyennes mobiles équipondérées sur celle de Shewhart pour des déréglages inférieurs à 3 écart-types de la moyenne; il existe toujours une carte de moyenne mobile d'ordre w meilleure que la carte de Shewhart. Il est d'ailleurs possible de trouver une valeur w optimale minimisant POM (δ). Les figures en annexe 3 mettent en évidence ces minima pour

des valeurs de déréglages fixées. Ainsi si on veut détecter un déréglage d'un écart-type de la moyenne, la carte la plus efficace sera celle des moyennes mobiles d'ordre 7, alors qu'une moyenne mobile d'ordre 3 sera optimale pour un déréglage de 2 écart-types de la moyenne. Pour de très petits déréglages, l'optimum se situe au delà de $w = 10$ ce qui n'est guère recommandable en pratique. L'existence d'une remontée de la période opérationnelle moyenne lorsque w augmente peut s'expliquer de la façon suivante : si w est trop grand, à partir du moment où le déréglage se produit et pendant un certain temps on calcule une moyenne d'un nombre important de bonnes valeurs et de quelques mauvaises. Ces quelques mauvaises valeurs sont alors lissées par les bonnes, ce qui retarde la détection.

Les graphiques et tableaux sont fonction de δ qui représente le déréglage exprimé en nombres d'écart-type de la moyenne. Or les exigences du contrôle portent sur la détection de Δ. Mais comme $\delta = \Delta\sqrt{n}/\sigma_0$, la taille des prélèvements intervient donc implicitement. On peut alors trouver la taille des sous-groupes en fixant la période opérationnelle moyenne désirée. Ainsi supposons que l'on veuille détecter un déréglage d'un écart-type : $\Delta = \sigma_0$ en moins de 5 prélèvements en moyenne. La table donnant POM (δ, 3, w) nous indique alors les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} w &= 1 \quad & \delta &= 2.15 \\ w &= 2 \quad & \delta &= 1.625 \\ w &= 3 \quad & \delta &= 1.425 \\ w &= 4 \quad & \delta &= 1.35 \end{aligned}$$

Comme δ vaut alors $\sqrt{n}$, on en déduit que l'objectif sera atteint soit par une carte de Shewhart avec n égal à 5, soit par une carte de moyennes mobiles d'ordre 2 avec n égal à 3 ou par une moyenne mobile d'ordre 3 avec n égal à 2. On choisira pour des raisons économiques évidentes la carte des moyennes mobiles d'ordre 3. L'utilisation de tables de POM pour des cartes CUSUM et EWMA dans les normes AFNOR X06-031.4 et X06-031.3 permet une démarche équivalente : pour un nombre moyen d'échantillons entre deux fausses alertes fixé à 370, on peut trouver des cartes CUSUM et EWMA pouvant détecter un déréglage d'un écart-type en moins de cinq prélèvements. En effet pour $k = 1$ et $h = 2.516$ on a une POM égale à 3.3 avec des échantillons de taille 4 et pour $k = 0.75$ et $h = 3.34$, la POM vaut 5.2 et la taille des échantillons vaut alors 2.25. On pourra donc trouver une carte CUSUM équivalente à une moyenne mobile tant en terme de POM que de taille d'échantillons. Pour les EWMA, on trouve $r = 0.4$ et $L = 2.96$ pour une POM $= 3.3$ avec $n = 4$; ou $r = 0.26$ $L = 2.9$ et POM $= 5.2$ avec $n = 2.25$. De même en utilisant la fonction ewmaarl de SAS on a calculé les périodes opérationnelles moyennes pour les valeurs $\delta = 2.15$, $\delta = 1.625$ et $\delta = 1.425$. Pour chacun de ces déréglages il est possible de trouver plusieurs combinaisons de r et L définissant une carte EWMA capable de détecter un déréglage d'un écart-type en moins de cinq prélèvements avec POM(0) égale à 370.

5. conclusion

Nous avons montré que la carte de moyennes mobiles équipondérées pouvait être utilisée dans les mêmes conditions que les cartes CUSUM et EWMA pour

remplacer la carte de Shewhart. Les calculs d'efficacité reposent sur l'hypothèse de base d'un déréglage instantané et constant ce qui n'est pas toujours réaliste. Il faudrait envisager le cas de dérives progressives mais les calculs restent à faire, comme pour les autres cartes de contrôle d'ailleurs.

Références

[1] CROSIER R. B. A New Two-Sided Cumulative Sum Quality Control Scheme. Technometrics, 28,3, p.187-194, 1986.

[2] LUCAS J. M. and SACCUCCI M. S. Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes : Properties and Enhancements. Technometrics, 32,1, p.1-12, 1990.

[3] MONTGOMERY D. J. Introduction to Statistical Quality Control, 2nd ed., Wiley, 1991.

[4] ROBERTS S.W. Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages. Technometrics, 1,3, p. 239-250,1959.

[5] ROBERTS S. W. A Comparaison of Some Control Chart Procedures. Technometrics, 8, 3, p. 411-430, 1966.

[6] ROBINSON P. B. and HO T. Y. Average Run Lengths of Geometric Moving Average Charts by Numerical Methods. Technometrics, 20,1, p. 85-93, 1978.

[7] RYAN T. P Statistical Methods for Quality Improvement, Wiley, 1989.

Remerciement : nous remercions Mme Françoise Leconte-Veyriac, élève de cycle C au CNAM, pour avoir programmé en SAS le calcul des périodes opérationnelles moyennes.

ANNEXE 1 Tables des périodes opérationnelles moyennes

PGM (δ, 2 , w)

	W									
δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	21.98	21.98	21.98	21.98	21.98	21.98	21.98	21.98	21.98	21.98
0.25	19.13	17.08	15.58	14.47	13.64	13.02	12.57	12.24	12.01	11.85
0.5	13.70	10.28	8.59	7.72	7.28	7.08	7.03	7.06	7.15	7.27
0.75	9.21	6.28	5.29	4.97	4.93	5.03	5.17	5.34	5.51	5.68
1	6.25	4.22	3.78	3.78	3.93	4.11	4.30	4.47	4.63	4.78
1.25	4.40	3.12	3.02	3.17	3.37	3.57	3.74	3.90	4.04	4.18
1.5	3.24	2.50	2.60	2.80	3.00	3.18	3.34	3.48	3.61	3.73
1.75	2.49	2.14	2.32	2.54	2.72	2.88	3.03	3.16	3.28	3.39
2	2.00	1.91	2.13	2.33	2.50	2.65	2.78	2.90	3.01	3.11
2.25	1.67	1.75	1.97	2.16	2.32	2.46	2.58	2.69	2.80	2.89
2.5	1.45	1.63	1.85	2.02	2.17	2.30	2.41	2.52	2.61	2.70
2.75	1.29	1.54	1.74	1.90	2.04	2.16	2.27	2.37	2.46	2.54
3	1.19	1.46	1.65	1.80	1.93	2.05	2.15	2.24	2.33	2.41
3.25	1.12	1.38	1.57	1.71	1.84	1.95	2.04	2.13	2.21	2.29
3.5	1.07	1.32	1.50	1.64	1.75	1.86	1.95	2.03	2.11	2.18
3.75	1.04	1.26	1.44	1.57	1.68	1.78	1.87	1.95	2.02	2.09
4	1.02	1.20	1.38	1.51	1.62	1.71	1.79	1.87	1.94	2.01

POM (δ, 3 , w)

	W									
δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.025	369.26	368.14	367.02	365.91	364.82	363.73	362.66	361.59	360.53	359.49
0.05	365.89	361.49	357.21	353.03	348.96	344.98	341.10	337.32	333.63	330.02
0.075	360.39	350.89	341.87	333.29	325.13	317.35	309.93	302.86	296.10	289.65
0.1	352.93	336.95	322.29	308.78	296.32	284.78	274.08	264.14	254.88	246.24
0.125	343.74	320.43	299.89	281.67	265.41	250.83	237.70	225.83	215.05	205.22
0.15	333.08	302.11	276.04	253.82	234.69	218.08	203.54	190.73	179.38	169.27
0.175	321.21	282.73	251.88	226.64	205.67	188.02	172.99	160.07	148.87	139.10
0.2	308.43	262.96	228.28	201.07	179.21	161.34	146.51	134.05	123.47	114.40
0.225	294.99	243.31	205.86	177.61	155.65	138.17	124.01	112.34	102.62	94.44
0.25	281.15	224.21	184.98	156.49	135.00	118.33	105.10	94.41	85.66	78.40
0.275	267.14	205.95	165.82	137.71	117.10	101.47	89.31	79.66	71.89	65.54
0.3	253.14	188.71	148.43	121.15	101.67	87.21	76.17	67.56	60.72	55.22
0.325	239.32	172.62	132.77	106.65	88.44	75.19	65.25	57.62	51.65	46.92
0.35	225.80	157.70	118.76	93.98	77.10	65.06	56.17	49.44	44.26	40.21
0.375	212.70	143.96	106.27	82.96	67.41	56.51	48.59	42.70	38.22	34.78
0.4	200.08	131.37	95.17	73.36	59.11	49.29	42.27	37.12	33.27	30.36
0.425	187.99	119.87	85.32	65.01	52.00	43.19	36.98	32.50	29.20	26.74
0.45	176.48	109.40	76.58	57.75	45.90	38.01	32.54	28.65	25.83	23.78
0.475	165.55	99.88	68.84	51.42	40.67	33.61	28.80	25.43	23.04	21.33
0.5	155.22	91.24	61.97	45.91	36.16	29.86	25.64	22.73	20.71	19.29
0.525	145.49	83.41	55.89	41.09	32.27	26.66	22.96	20.46	18.76	17.60
0.55	136.32	76.31	50.49	36.89	28.91	23.92	20.69	18.55	17.12	16.18
0.575	127.73	69.87	45.69	33.20	26.00	21.57	18.75	16.92	15.74	14.99
0.6	119.67	64.04	41.43	29.97	23.47	19.55	17.09	15.54	14.56	13.98
0.625	112.12	58.75	37.63	27.13	21.28	17.80	15.67	14.36	13.57	13.12
0.65	105.07	53.96	34.25	24.64	19.36	16.28	14.44	13.34	12.71	12.38
0.675	98.47	49.61	31.24	22.43	17.69	14.97	13.38	12.47	11.97	11.75
0.7	92.32	45.67	28.55	20.49	16.22	13.83	12.47	11.71	11.34	11.20
0.725	86.58	42.08	26.14	18.77	14.93	12.83	11.67	11.06	10.78	10.72
0.75	81.22	38.82	23.98	17.24	13.80	11.96	10.97	10.49	10.30	10.30
0.775	76.22	35.86	22.05	15.89	12.80	11.19	10.36	9.99	9.88	9.93
0.8	71.55	33.16	20.32	14.69	11.92	10.52	9.83	9.55	9.50	9.60
0.825	67.20	30.70	18.76	13.62	11.14	9.92	9.36	9.16	9.17	9.30
0.85	63.14	28.46	17.35	12.66	10.45	9.40	8.94	8.81	8.87	9.03
0.875	59.36	26.42	16.09	11.80	9.83	8.93	8.57	8.50	8.60	8.79
0.9	55.83	24.55	14.94	11.04	9.28	8.51	8.24	8.23	8.36	8.57
0.925	52.53	22.84	13.91	10.35	8.79	8.14	7.94	7.98	8.14	8.37
0.95	49.45	21.28	12.98	9.73	8.36	7.81	7.68	7.75	7.94	8.18
0.975	46.58	19.85	12.13	9.18	7.96	7.51	7.44	7.55	7.75	8.00
1	43.89	18.54	11.36	8.68	7.61	7.24	7.22	7.36	7.58	7.84
1.025	41.39	17.33	10.67	8.22	7.29	7.00	7.02	7.19	7.42	7.68
1.05	39.04	16.23	10.03	7.81	7.00	6.78	6.84	7.03	7.27	7.54
1.075	36.85	15.21	9.46	7.44	6.74	6.58	6.68	6.88	7.13	7.40
1.1	34.80	14.28	8.93	7.10	6.50	6.40	6.52	6.74	7.00	7.27
1.125	32.88	13.42	8.45	6.80	6.28	6.23	6.38	6.62	6.88	7.14
1.15	31.08	12.63	8.01	6.52	6.09	6.08	6.25	6.50	6.76	7.02
1.175	29.40	11.89	7.61	6.26	5.91	5.94	6.13	6.38	6.65	6.91
1.2	27.82	11.22	7.24	6.03	5.74	5.81	6.01	6.27	6.54	6.80
1.225	26.34	10.60	6.90	5.82	5.59	5.69	5.91	6.17	6.44	6.69
1.25	24.96	10.02	6.59	5.62	5.45	5.57	5.81	6.07	6.34	6.59
1.275	23.66	9.49	6.31	5.44	5.32	5.47	5.71	5.98	6.24	6.49
1.3	22.43	9.00	6.05	5.28	5.20	5.37	5.62	5.89	6.15	6.40
1.325	21.29	8.54	5.80	5.13	5.09	5.28	5.53	5.80	6.06	6.31
1.35	20.21	8.11	5.58	4.99	4.99	5.19	5.45	5.72	5.98	6.22
1.375	19.20	7.72	5.37	4.86	4.89	5.11	5.37	5.64	5.89	6.13
1.4	18.25	7.36	5.18	4.74	4.80	5.03	5.30	5.56	5.81	6.05
1.425	17.35	7.02	5.01	4.63	4.72	4.95	5.22	5.49	5.74	5.97
1.45	16.51	6.70	4.84	4.52	4.64	4.88	5.15	5.42	5.66	5.89
1.475	15.72	6.41	4.69	4.43	4.56	4.82	5.09	5.35	5.59	5.82
1.5	14.97	6.13	4.55	4.34	4.49	4.75	5.02	5.28	5.52	5.74
1.525	14.26	5.87	4.42	4.25	4.43	4.69	4.96	5.21	5.45	5.67
1.55	13.60	5.64	4.30	4.17	4.36	4.63	4.90	5.15	5.38	5.60
1.575	12.97	5.41	4.18	4.10	4.30	4.57	4.84	5.09	5.32	5.53
1.6	12.38	5.20	4.08	4.03	4.25	4.52	4.78	5.03	5.26	5.47
1.625	11.82	5.01	3.98	3.96	4.19	4.46	4.73	4.97	5.19	5.41
1.65	11.30	4.83	3.89	3.90	4.14	4.41	4.67	4.91	5.14	5.34
1.675	10.80	4.66	3.80	3.84	4.09	4.36	4.62	4.86	5.08	5.28
1.7	10.33	4.50	3.72	3.79	4.04	4.31	4.57	4.80	5.02	5.22
1.725	9.89	4.35	3.64	3.73	3.99	4.26	4.52	4.75	4.97	5.17
1.75	9.47	4.21	3.57	3.68	3.95	4.22	4.47	4.70	4.91	5.11
1.775	9.07	4.07	3.50	3.64	3.90	4.17	4.42	4.65	4.86	5.06
1.8	8.69	3.95	3.44	3.59	3.86	4.13	4.37	4.60	4.81	5.00
1.825	8.33	3.83	3.38	3.55	3.82	4.09	4.33	4.55	4.76	4.95
1.85	8.00	3.72	3.32	3.51	3.78	4.04	4.28	4.51	4.71	4.90
1.875	7.67	3.62	3.27	3.47	3.74	4.00	4.24	4.46	4.66	4.85
1.9	7.37	3.52	3.22	3.43	3.70	3.96	4.20	4.42	4.62	4.80
1.925	7.08	3.43	3.17	3.39	3.67	3.92	4.16	4.37	4.57	4.76
1.95	6.81	3.34	3.13	3.36	3.63	3.89	4.12	4.33	4.53	4.71
1.975	6.55	3.26	3.08	3.32	3.60	3.85	4.08	4.29	4.48	4.67

PCM (δ, 3 , w) (suite)

	W									
δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	6.30	3.18	3.04	3.29	3.56	3.81	4.04	4.25	4.44	4.62
2.025	6.07	3.11	3.01	3.26	3.53	3.78	4.00	4.21	4.40	4.58
2.05	5.85	3.04	2.97	3.22	3.50	3.74	3.97	4.17	4.36	4.54
2.075	5.63	2.98	2.93	3.19	3.47	3.71	3.93	4.13	4.32	4.50
2.1	5.43	2.92	2.90	3.17	3.43	3.68	3.90	4.10	4.28	4.45
2.125	5.24	2.86	2.87	3.14	3.40	3.64	3.86	4.06	4.24	4.42
2.15	5.06	2.80	2.84	3.11	3.37	3.61	3.83	4.02	4.21	4.38
2.175	4.89	2.75	2.81	3.08	3.35	3.58	3.79	3.99	4.17	4.34
2.2	4.72	2.70	2.78	3.05	3.32	3.55	3.76	3.96	4.13	4.30
2.225	4.56	2.65	2.75	3.03	3.29	3.52	3.73	3.92	4.10	4.26
2.25	4.41	2.61	2.72	3.00	3.26	3.49	3.70	3.89	4.06	4.23
2.275	4.27	2.57	2.70	2.98	3.24	3.46	3.67	3.86	4.03	4.19
2.3	4.13	2.53	2.67	2.95	3.21	3.43	3.64	3.83	4.00	4.16
2.325	4.00	2.49	2.65	2.93	3.18	3.41	3.61	3.79	3.97	4.13
2.35	3.88	2.45	2.63	2.91	3.16	3.38	3.58	3.76	3.93	4.09
2.375	3.76	2.42	2.61	2.89	3.13	3.35	3.55	3.73	3.90	4.06
2.4	3.65	2.38	2.58	2.86	3.11	3.33	3.52	3.71	3.87	4.03
2.425	3.54	2.35	2.56	2.84	3.09	3.30	3.50	3.68	3.84	4.00
2.45	3.43	2.32	2.54	2.82	3.06	3.28	3.47	3.65	3.81	3.97
2.475	3.34	2.29	2.52	2.80	3.04	3.25	3.44	3.62	3.78	3.94
2.5	3.24	2.27	2.50	2.78	3.02	3.23	3.42	3.59	3.76	3.91
2.525	3.15	2.24	2.49	2.76	2.99	3.20	3.39	3.57	3.73	3.88
2.55	3.06	2.22	2.47	2.74	2.97	3.18	3.37	3.54	3.70	3.85
2.575	2.98	2.19	2.45	2.72	2.95	3.16	3.34	3.52	3.67	3.82
2.6	2.90	2.17	2.43	2.70	2.93	3.13	3.32	3.49	3.65	3.79
2.625	2.83	2.15	2.41	2.68	2.91	3.11	3.30	3.46	3.62	3.77
2.65	2.75	2.13	2.40	2.66	2.89	3.09	3.27	3.44	3.60	3.74
2.675	2.68	2.11	2.38	2.64	2.87	3.07	3.25	3.42	3.57	3.71
2.7	2.62	2.09	2.37	2.62	2.85	3.05	3.23	3.39	3.55	3.69
2.725	2.55	2.07	2.35	2.61	2.83	3.03	3.21	3.37	3.52	3.66
2.75	2.49	2.05	2.33	2.59	2.81	3.01	3.18	3.35	3.50	3.64
2.775	2.43	2.03	2.32	2.57	2.79	2.99	3.16	3.32	3.47	3.61
2.8	2.38	2.02	2.30	2.56	2.77	2.97	3.14	3.30	3.45	3.59
2.825	2.32	2.00	2.29	2.54	2.76	2.95	3.12	3.28	3.43	3.57
2.85	2.27	1.99	2.27	2.52	2.74	2.93	3.10	3.26	3.40	3.54
2.875	2.22	1.97	2.26	2.51	2.72	2.91	3.08	3.24	3.38	3.52
2.9	2.17	1.96	2.24	2.49	2.70	2.89	3.06	3.22	3.36	3.50
2.925	2.13	1.95	2.23	2.48	2.69	2.87	3.04	3.20	3.34	3.47
2.95	2.08	1.93	2.22	2.46	2.67	2.85	3.02	3.18	3.32	3.45
2.975	2.04	1.92	2.20	2.45	2.65	2.84	3.00	3.16	3.30	3.43
3	2.00	1.91	2.19	2.43	2.64	2.82	2.99	3.14	3.28	3.41
3.025	1.96	1.90	2.18	2.42	2.62	2.80	2.97	3.12	3.26	3.39
3.05	1.92	1.88	2.16	2.40	2.61	2.79	2.95	3.10	3.24	3.37
3.075	1.89	1.87	2.15	2.39	2.59	2.77	2.93	3.08	3.22	3.35
3.1	1.85	1.86	2.14	2.37	2.57	2.75	2.91	3.06	3.20	3.33
3.125	1.82	1.85	2.13	2.36	2.56	2.74	2.90	3.04	3.18	3.31
3.15	1.79	1.84	2.11	2.35	2.54	2.72	2.88	3.03	3.16	3.29
3.175	1.76	1.83	2.10	2.33	2.53	2.70	2.86	3.01	3.14	3.27
3.2	1.73	1.82	2.09	2.32	2.52	2.69	2.85	2.99	3.12	3.25
3.225	1.70	1.81	2.08	2.31	2.50	2.67	2.83	2.97	3.11	3.23
3.25	1.67	1.80	2.07	2.29	2.49	2.66	2.81	2.96	3.09	3.21
3.275	1.64	1.79	2.06	2.28	2.47	2.64	2.80	2.94	3.07	3.19
3.3	1.62	1.78	2.04	2.27	2.46	2.63	2.78	2.92	3.05	3.17
3.325	1.59	1.78	2.03	2.26	2.45	2.61	2.77	2.91	3.04	3.16
3.35	1.57	1.77	2.02	2.24	2.43	2.60	2.75	2.89	3.02	3.14
3.375	1.55	1.76	2.01	2.23	2.42	2.59	2.74	2.87	3.00	3.12
3.4	1.53	1.75	2.00	2.22	2.41	2.57	2.72	2.86	2.99	3.11
3.425	1.50	1.74	1.99	2.21	2.39	2.56	2.71	2.84	2.97	3.09
3.45	1.48	1.73	1.98	2.20	2.38	2.54	2.69	2.83	2.95	3.07
3.475	1.46	1.73	1.97	2.19	2.37	2.53	2.68	2.81	2.94	3.06
3.5	1.45	1.72	1.96	2.17	2.36	2.52	2.66	2.80	2.92	3.04
3.525	1.43	1.71	1.95	2.16	2.35	2.51	2.65	2.78	2.91	3.02
3.55	1.41	1.70	1.94	2.15	2.33	2.49	2.64	2.77	2.89	3.01
3.575	1.39	1.70	1.93	2.14	2.32	2.48	2.62	2.75	2.88	2.99
3.6	1.38	1.69	1.92	2.13	2.31	2.47	2.61	2.74	2.86	2.98
3.625	1.36	1.68	1.91	2.12	2.30	2.45	2.60	2.73	2.85	2.96
3.65	1.35	1.67	1.91	2.11	2.29	2.44	2.58	2.71	2.83	2.95
3.675	1.33	1.67	1.90	2.10	2.28	2.43	2.57	2.70	2.82	2.93
3.7	1.32	1.66	1.89	2.09	2.26	2.42	2.56	2.69	2.81	2.92
3.725	1.31	1.65	1.88	2.08	2.25	2.41	2.55	2.67	2.79	2.90
3.75	1.29	1.64	1.87	2.07	2.24	2.40	2.53	2.66	2.78	2.89
3.775	1.28	1.64	1.86	2.06	2.23	2.38	2.52	2.65	2.76	2.87
3.8	1.27	1.63	1.86	2.05	2.22	2.37	2.51	2.63	2.75	2.86
3.825	1.26	1.62	1.85	2.04	2.21	2.36	2.50	2.62	2.74	2.85
3.85	1.25	1.61	1.84	2.03	2.20	2.35	2.49	2.61	2.72	2.83
3.875	1.24	1.61	1.83	2.02	2.19	2.34	2.47	2.60	2.71	2.82
3.9	1.23	1.60	1.82	2.01	2.18	2.33	2.46	2.58	2.70	2.81
3.925	1.22	1.59	1.82	2.00	2.17	2.32	2.45	2.57	2.69	2.79
3.95	1.21	1.58	1.81	1.99	2.16	2.31	2.44	2.56	2.67	2.78
3.975	1.20	1.58	1.80	1.98	2.15	2.30	2.43	2.55	2.66	2.77
4	1.19	1.57	1.79	1.98	2.14	2.29	2.42	2.54	2.65	2.75

POM (δ, 2.5 , w)

δ	W 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52
0.25	65.77	55.55	48.11	42.53	38.23	34.87	32.21	30.08	28.36	26.97
0.5	41.49	27.42	20.54	16.70	14.40	12.99	12.12	11.60	11.31	11.19
0.75	24.61	13.95	10.06	8.35	7.59	7.30	7.25	7.34	7.51	7.71
1	14.92	7.94	5.97	5.37	5.27	5.39	5.59	5.81	6.04	6.26
1.25	9.46	5.08	4.19	4.11	4.27	4.50	4.73	4.95	5.16	5.36
1.5	6.30	3.62	3.32	3.47	3.70	3.94	4.16	4.36	4.54	4.71
1.75	4.41	2.83	2.84	3.07	3.31	3.53	3.73	3.91	4.08	4.23
2	3.24	2.37	2.54	2.79	3.02	3.22	3.40	3.56	3.71	3.85
2.25	2.49	2.09	2.33	2.57	2.78	2.96	3.13	3.28	3.41	3.54
2.5	2.00	1.90	2.16	2.39	2.58	2.75	2.90	3.04	3.17	3.29
2.75	1.67	1.77	2.03	2.24	2.42	2.57	2.72	2.85	2.97	3.08
3	1.45	1.68	1.91	2.11	2.28	2.42	2.56	2.68	2.79	2.90
3.25	1.29	1.59	1.81	1.99	2.15	2.29	2.42	2.53	2.64	2.74
3.5	1.19	1.51	1.73	1.90	2.05	2.18	2.30	2.41	2.51	2.60
3.75	1.12	1.44	1.65	1.81	1.95	2.08	2.19	2.29	2.39	2.48
4	1.07	1.37	1.59	1.74	1.87	1.99	2.10	2.19	2.28	2.37

ANNEXE 2 Courbes de la période opérationnelle moyenne

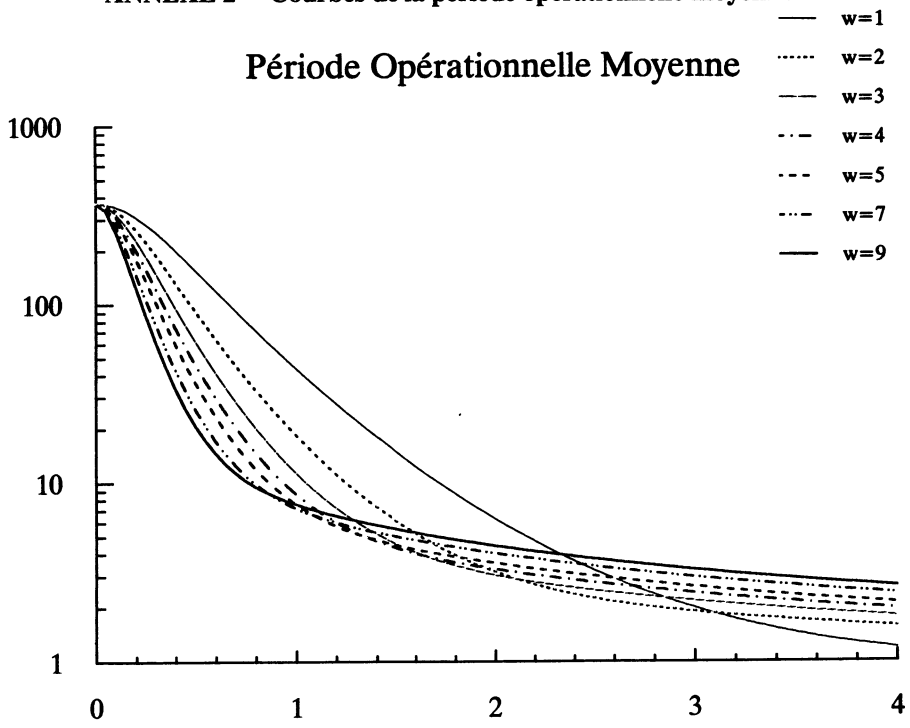


FIGURE A

ANNEXE 3 Influence de l'ordre de la moyenne mobile sur la POM

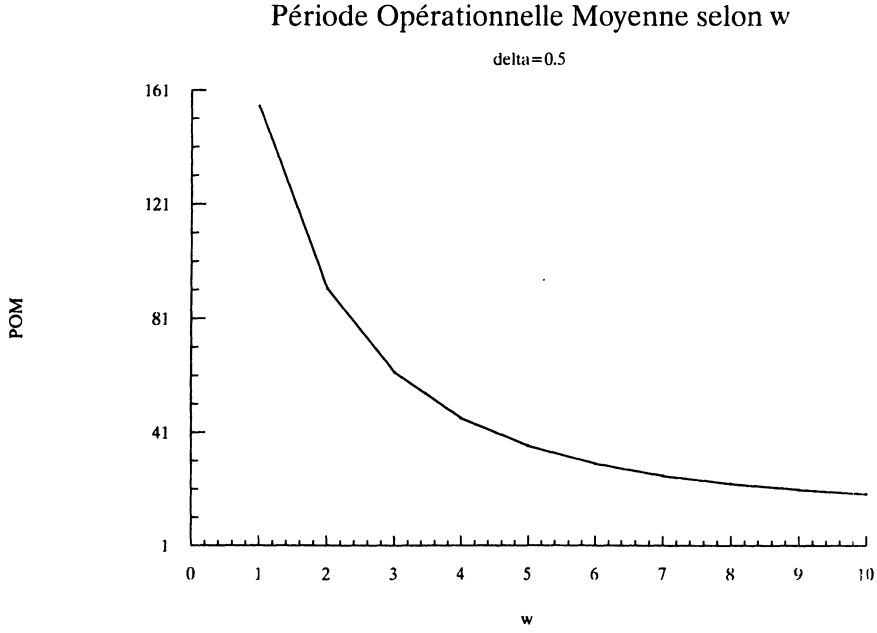


FIGURE B1

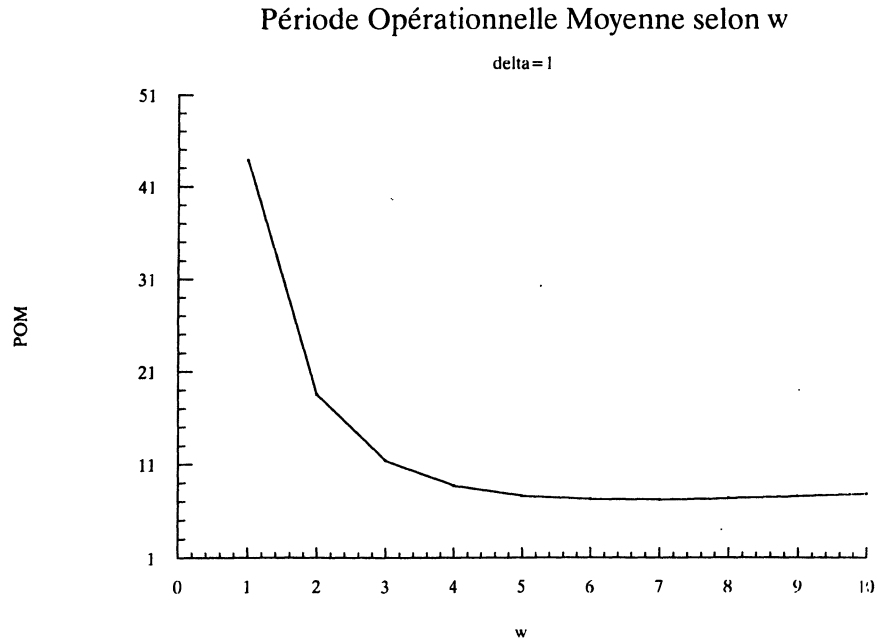


FIGURE B2

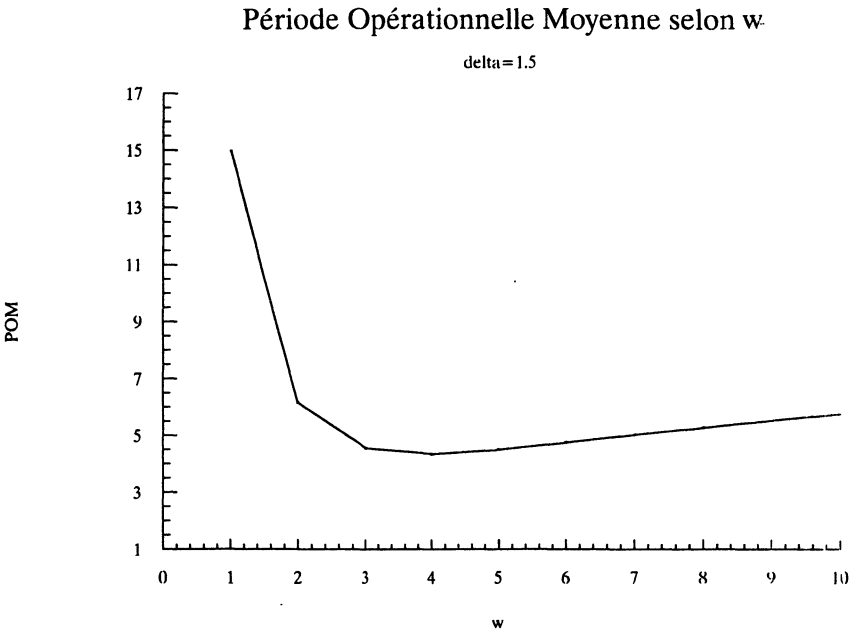


FIGURE B3

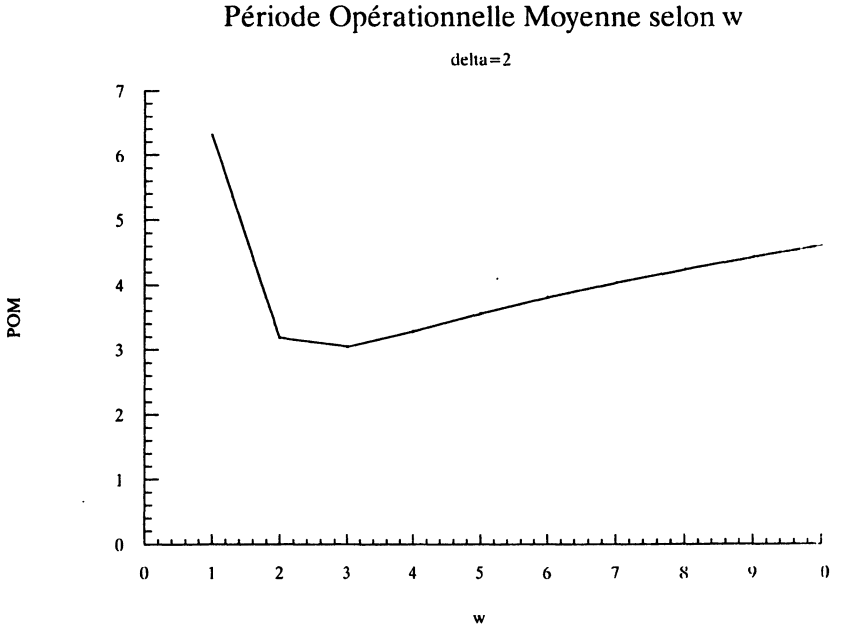


FIGURE B4

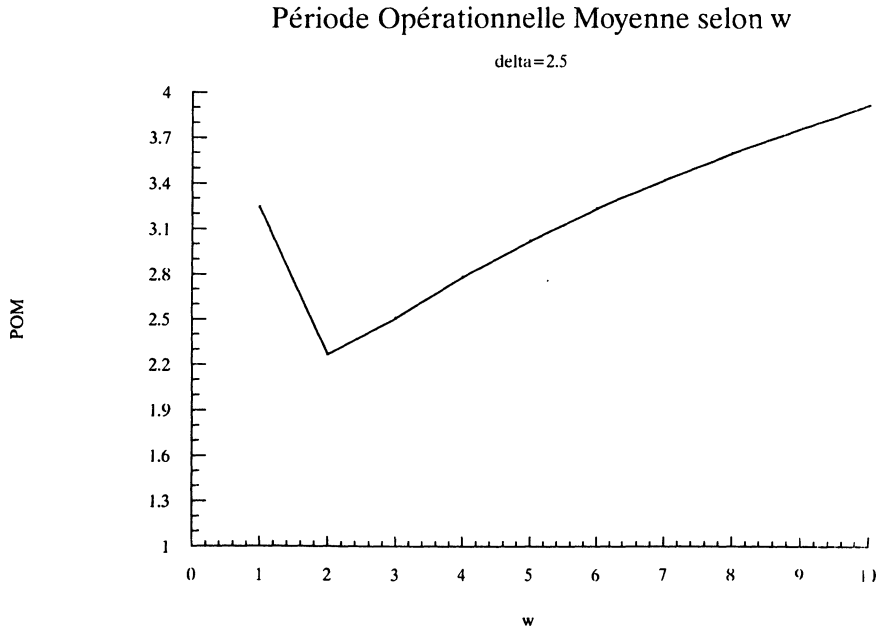


FIGURE B5

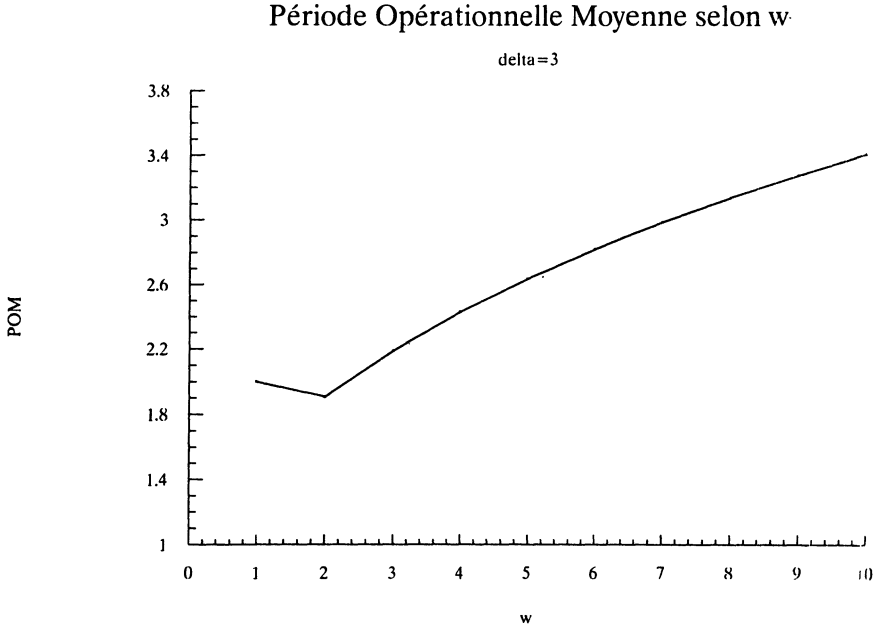


FIGURE B6